# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

1. Основные понятия теории вероятностей

2. Вероятностные неравенства
   - Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $\overline{S}_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} S_k$.

В настоящем параграфе будут получены оценки для распределения $\overline{S}_n$, которые играют важное значение при изучении предельного поведения сумм независимых случайных величин и случайных процессов.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Лемма 2.7**

*Пусть на одном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *заданы событие* $A$ *и случайная величина* $\tau$, *принимающая только положительные целые значения* ($A \in \mathcal{F}$ *и* $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}$, $k \geqslant 1$). *Тогда для всех* $n \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant n) \leqslant \frac{\mathsf{P}(A)}{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k)}. \tag{2.21}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Доказательство**

В силу формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \mid \tau = k)\mathsf{P}(\tau = k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k)\mathsf{P}(\tau = k) \geqslant \\ &\geqslant \min_{k \leqslant n} \mathsf{P}(A \mid \tau = k)\mathsf{P}(\tau \leqslant n), \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (2.21). □

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

### Теорема 2.9

*Для всех* $x, y \in \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{P}(S_n \geqslant x - y)}{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y)}. \tag{2.22}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

В лемме 2.7 положим $\tau = \min\{k \geqslant 1 : S_k \geqslant x\}$, $A = \{S_n \geqslant x - y\}$ и заметим, что $\{\tau \leqslant n\} = \{\overline{S}_n \geqslant x\}$ и $S_k \geqslant x$ на множестве $\{\tau = k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A \mid \tau = k) &= \mathsf{P}(S_n \geqslant x - y \mid \tau = k) = \\ &= \mathsf{P}(S_k + S_n - S_k \geqslant x - y \mid \tau = k) \geqslant \\ &\geqslant \mathsf{P}(x + S_n - S_k \geqslant x - y \mid \tau = k) = \\ &= \mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y \mid \tau = k). \qquad (2.23) \end{aligned}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Нетрудно заметить, что разность $S_n - S_k = X_{k+1} + \ldots + X_n$ измерима относительно σ-алгебры $\sigma(X_{k+1}, \ldots, X_n)$. С другой стороны,

$$\{\tau = k\} = \{S_1 < x, \ldots, S_{k-1} < x, S_k \geqslant x\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_k).$$

Поэтому события $\{S_n - S_k \geqslant -y\}$ и $\{\tau = k\}$ независимы и, следовательно,

$$\mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y \mid \tau = k) = \mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y).$$

Тогда для всех $k \leqslant n$ из (2.23) получаем:

$$\mathsf{P}(A \mid \tau = k) \geqslant \mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y \mid \tau = k) = \mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y).$$

Теперь из (2.21) получаем неравенство (2.22). □

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Следствие 2.8 (неравенство Леви — Колмогорова)**

*Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{D}X_j < \infty$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant 2\mathsf{P}(S_n \geqslant x - \sqrt{2\mathsf{D}S_n}). \tag{2.24}$$

## Доказательство

В теореме 2.9 положим $y = \sqrt{2\mathrm{D}S_n}$ и покажем, что для всех $k \leqslant n$

$$\mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant -y) \geqslant \frac{1}{2}.$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n - S_k < -y) &= \mathsf{P}(S_k - S_n > y) \leqslant \mathsf{P}(|S_k - S_n| > y) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\mathsf{D}(S_k - S_n)}{y^2} = \frac{1}{y^2}\mathsf{D}\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j\Big) = \\ &= \frac{1}{y^2}\sum_{j=k+1}^{n} \mathsf{D}X_j \leqslant \frac{1}{y^2}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}X_j = \frac{\mathsf{D}S_n}{y^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (2.24). □

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Определение**

Говорят, что две случайные величины *одинаково распределены*, и пишут $X \overset{d}{=} Y$, если $\mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(Y \in B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Заметим, что эти случайные величины могут быть заданы на разных вероятностных пространствах.

**Определение**

Говорят, что случайная величина $X$ имеет *симметричное распределение*, если $X \overset{d}{=} -X$.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

Отметим некоторые свойства симметричных случайных величин.

1. Если случайная величина $X$ имеет симметричное распределение и её математическое ожидание существует, то $\mathsf{E}X = 0$.

2. Если случайная величина $X$ имеет симметричное распределение, то $\mathsf{P}(X \geqslant 0) \geqslant 1/2$.

Действительно,

$$\begin{aligned} 2\mathsf{P}(X \geqslant 0) &= \mathsf{P}(X \geqslant 0) + \mathsf{P}(-X \geqslant 0) = \mathsf{P}(X \geqslant 0) + \mathsf{P}(X \leqslant 0) = \\ &= 1 + \mathsf{P}(X = 0) \geqslant 1. \end{aligned}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

3. Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие симметричное распределение, то $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ имеет симметричное распределение.

Для доказательства этого свойства достаточно рассмотреть две независимые симметричные случайные величины $X_1$ и $X_2$ и воспользоваться формулой свёртки. Пусть $F$ и $G$ — функции распределения $X_1$ и $X_2$ соответственно. В силу симметричности имеем $F(x) = \mathsf{P}(-X_1 < x)$ и $G(x) = \mathsf{P}(-X_2 < x)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(-(X_1 + X_2) < x) &= \mathsf{P}(-X_1 + (-X_2) < x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x-t)\, dG(t) = \\
&= \mathsf{P}(X_1 + X_2 < x).
\end{aligned}
$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Следствие 2.9 (**неравенство Леви**)

*Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *— независимые случайные величины, имеющие симметричное распределение. Тогда для всех* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant 2\mathsf{P}(S_n \geqslant x). \tag{2.25}$$

## Доказательство

Это неравенство есть непосредственное следствие теоремы 2.9. Действительно, положив $y = 0$ в (2.22) и воспользовавшись свойствами симметричного распределения, получаем:

$$\mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant 0) = \mathsf{P}(X_{k+1} + \ldots + X_n \geqslant 0) \geqslant 1/2.$$

Следовательно, $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}(S_n - S_k \geqslant 0) \geqslant 1/2$. Отсюда следует (2.25). □

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Замечание

Применяя неравенство Леви (2.25) к случайным величинам $-X_j$, получаем:

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(-S_k)\geqslant x)\leqslant 2\mathsf{P}(-S_n\geqslant x),$$

и, следовательно, для всех $x>0$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant x) &\leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\geqslant x)+\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(-S_k)\geqslant x)\leqslant\\ &\leqslant 2\mathsf{P}(S_n\geqslant x)+2\mathsf{P}(-S_n\geqslant x)=\\ &= 2\mathsf{P}(|S_n|\geqslant x).\end{aligned}\tag{2.26}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Определение

*Медианой* случайной величины $X$ называется любое число $\mathrm{med}(X)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\mathsf{P}(X \geqslant \mathrm{med}(X)) \geqslant 1/2 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(X \leqslant \mathrm{med}(X)) \geqslant 1/2.$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

Медиана существует у любой случайной величины, но может быть не единственна.
Пусть случайная величина $X$ имеет функцию распределения $F$. Если уравнение $F(t) = 1/2$ имеет единственное решение, то это решение и является медианой.
Если уравнение $F(t) = 1/2$ имеет бесконечно много решений, то существует отрезок $I$ такой, что $F(t) = 1/2$ для всех $t \in I$. Любая точка этого отрезка является медианой.
Если же уравнение $F(t) = 1/2$ не имеет решений, то найдётся точка $t_0$ такая, что $F(t_0) < 1/2$ и $F(t_0 + 0) \geqslant 1/2$. Эта точка $t_0$ и будет медианой.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

Отметим также, что

$$F(\mathrm{med}(X)) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(\mathrm{med}(X) + 0)$$

и $\mathrm{med}(-X) = -\mathrm{med}(X)$. В частности, если $X$ имеет симметричное распределение, то 0 является медианой $X$.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Следствие 2.10

*Для всех* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(\overline{S}_n > x) \leqslant 2\mathsf{P}(S_n > x - \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{med}(S_k - S_n)).$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

В теореме 2.9 положим $y = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{med}(S_k - S_n)$ и покажем, что для всех $k \leqslant n$

$$\mathsf{P}(S_n - S_k > -y) \geqslant 1/2.$$

Действительно, $y \geqslant \operatorname{med}(S_k - S_n) = -\operatorname{med}(S_n - S_k)$, т. е. $\operatorname{med}(S_n - S_k) \geqslant -y$ для всех $k \leqslant n$. Тогда по определению медианы

$$\mathsf{P}(S_n - S_k > -y) \geqslant \mathsf{P}(S_n - S_k > \operatorname{med}(S_n - S_k)) \geqslant 1/2.$$

$\square$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Лемма 2.8

*Пусть случайные величины* $X$ *и* $\tau$ *заданы на одном вероятностном пространстве,* $X > 0$, $\tau \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant n) \leqslant \frac{\mathsf{E}X}{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{E}(X | \tau = k)}.$$

## Замечание

Лемма 2.7 есть частный случай леммы 2.8 при $X = I_A$.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} I(\tau = k) = 1$ и

$$\mathsf{E}(X \mid \tau = k) = \frac{\mathsf{E}(X; \tau = k)}{\mathsf{P}(\tau = k)} = \frac{\mathsf{E}(XI(\tau = k))}{\mathsf{P}(\tau = k)},$$

то

$$\begin{aligned} \mathsf{E}X &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}(XI(\tau = k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau = k)\mathsf{E}(X \mid \tau = k) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = k)\mathsf{E}(X \mid \tau = k) \geqslant \mathsf{P}(\tau \leqslant n) \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{E}(X \mid \tau = k). \end{aligned}$$

□

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Теорема 2.10**

*Пусть* $g$ *— неотрицательная и неубывающая функция. Тогда для всех* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{E}g(S_n)}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathsf{E}g(S_n - S_k + x)}. \tag{2.27}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Положим в лемме 2.8 $X = g(S_n) \geqslant 0$, $\tau = \min\{k \geqslant 1 : S_k \geqslant x\}$ и $\tau = \infty$, если $S_k \leqslant x$ для всех $k \geqslant 1$.
Заметим, что $\{\tau = k\} = \{S_1 < x, \ldots, S_{k-1} < x, S_k \geqslant x\}$ и $\{\tau \leqslant n\} = \{\overline{S}_n \geqslant x\}$. Так как $S_k \geqslant x$ на множестве $\{\tau = k\}$, для всех $k \leqslant n$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(g(S_n) \mid \tau = k) &= \mathsf{E}(g(S_n - S_k + S_k) \mid \tau = k) \geqslant \\ &\geqslant \mathsf{E}(g(S_n - S_k + x) \mid \tau = k) = \mathsf{E}g(S_n - S_k + x). \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в силу независимости случайных величин $S_n - S_k$ и $I(\tau = k)$. $\square$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

Следующее неравенство есть аналог обобщённого неравенства Чебышёва для максимума сумм независимых случайных величин.

## Следствие 2.11

*Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0$, $j \leqslant n$, *и пусть* $g$ *— неотрицательная, неубывающая и выпуклая функция. Тогда для всех* $x$ *таких, что* $g(x) > 0$

$$\mathsf{P}(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{E}g(S_n)}{g(x)}. \tag{2.28}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

В силу выпуклости $g$ из неравенства Йенсена (1.6) получаем:

$$\mathsf{E}g(S_n - S_k + x) \geqslant g(\mathsf{E}(S_n - S_k + x)) = g(x).$$

Теперь из (2.27) следует неравенство (2.28). $\square$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Следствие 2.12 (неравенство Колмогорова)**

*Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{D}X_j < \infty$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{D}S_n}{x^2}. \tag{2.29}$$

### Доказательство

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям следствия 2.11. Заметим, что $g(x) + g(-x) = x^2$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Применим неравенство (2.28) к случайным величинам $X_j$ и $-X_j$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x) &= \mathsf{P}\Big(\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x\} \cup \{\max_{1\leqslant k\leqslant n} (-S_k) \geqslant x\}\Big) \leqslant \\
&\leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x) + \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} (-S_k) \geqslant x) \leqslant \\
&\leqslant \frac{\mathsf{E}g(S_n)}{x^2} + \frac{\mathsf{E}g(-S_n)}{x^2} = \frac{\mathsf{E}(g(S_n) + g(-S_n))}{x^2} = \\
&= \frac{\mathsf{E}S_n^2}{x^2} = \frac{\mathsf{D}S_n}{x^2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

Обобщением неравенства Колмогорова (2.29) является следующее неравенство Хайека — Реньи.

**Следствие 2.13 (неравенство Хайека — Реньи)**

*Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{E}X_j^2 < \infty$, $j \leqslant n$. *Пусть также* $0 < c_n \leqslant c_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant c_1$. *Тогда для всех* $x > 0$ *и* $m < n$

$$\mathsf{P}\big(\max_{m\leqslant k\leqslant n} c_k|S_k| \geqslant x\big) \leqslant \frac{1}{x^2}\left(c_m^2\sum_{k=1}^{m}\mathsf{E}X_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2\mathsf{E}X_k^2\right). \tag{2.30}$$

## Доказательство

Положим в лемме 2.8

$$X = \sum_{j=m}^{n-1} (c_j^2 - c_{j+1}^2) S_j^2 + c_n^2 S_n^2, \quad \tau = \min\{j \geqslant m : c_j |S_j| \geqslant x\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathsf{E} X = c_m^2 \sum_{k=1}^{m} \mathsf{E} X_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2 \mathsf{E} X_k^2, \quad \{\tau \leqslant n\} = \{\max_{m \leqslant k \leqslant n} c_k |S_k| \geqslant x|\}.$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Так как $S_k^2 \geqslant x^2/c_k^2$ на множестве $\{\tau = k\}$, то $\mathsf{E}(S_k^2 \mid \tau = k) \geqslant x^2/c_k^2$. Если $j > k$, то $X_j$ и $S_k I(\tau = k)$ независимы и, следовательно,

$$\mathsf{E}(X_j S_k \mid \tau = k) = \mathsf{E}X_j \, \mathsf{E}(S_k \mid \tau = k) = 0.$$

Таким образом, для всех $j > k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(S_j^2 \mid \tau = k) &= \mathsf{E}((S_j - S_k)^2 \mid \tau = k) + \mathsf{E}(S_k^2 \mid \tau = k) \geqslant \\ &\geqslant \mathsf{E}(S_k^2 \mid \tau = k) \geqslant \frac{x^2}{c_k^2}. \end{aligned}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Далее, для $k \geqslant m$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X \mid \tau = k) &= \sum_{j=m}^{n-1}(c_j^2 - c_{j+1}^2)\mathsf{E}(S_j^2 \mid \tau = k) + c_n^2\mathsf{E}(S_n^2 \mid \tau = k) \geqslant \\
&\geqslant \sum_{j=k}^{n-1}(c_j^2 - c_{j+1}^2)\mathsf{E}(S_j^2 \mid \tau = k) + c_n^2\mathsf{E}(S_n^2 \mid \tau = k) \geqslant \\
&\geqslant \frac{x^2}{c_k^2}\left(\sum_{j=k}^{n-1}(c_j^2 - c_{j+1}^2) + c_n^2\right) = x^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2.8 вытекает неравенство (2.30). □

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

В заключение этого параграфа приведём ещё одно неравенство Колмогорова — оценку снизу для распределения максимума сумм ограниченных случайных величин.

### Теорема 2.11

*Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0$ *и пусть* $\mathsf{P}(|X_j| \leqslant c) = 1$ *для некоторого* $c > 0$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x\Big) \geqslant 1 - \frac{(x+c)^2}{B_n^2}, \tag{2.31}$$

*где* $B_n^2 = \mathsf{D}S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{D}X_j$.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Положим $\tau = \min\{k \geqslant 1 : |S_k| \geqslant x\}$, $A = \{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x\}$. Тогда $A = \{\tau \leqslant n\}$ и

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(S_n^2; \bar{A}) &\leqslant x^2\mathsf{E}(1; \bar{A}) = x^2\mathsf{P}(\bar{A}) = x^2 - x^2\mathsf{P}(A), \\ \mathsf{E}(S_n^2; A) &= \mathsf{E}S_n^2 - \mathsf{E}(S_n^2; \bar{A}) \geqslant B_n^2 - x^2 + x^2\mathsf{P}(A). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(S_n^2 \mid \tau = k) &= \mathsf{E}((S_n - S_k + S_k)^2 \mid \tau = k) = \\ &= \mathsf{E}((S_n - S_k)^2 \mid \tau = k) + \mathsf{E}(S_k^2 \mid \tau = k) + \\ &+ 2\mathsf{E}(S_k(S_n - S_k) \mid \tau = k). \end{aligned}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Так как на множестве $\{\tau = k\}$

$$|S_k| = |S_{k-1} + X_k| \leqslant |S_{k-1}| + |X_k| \leqslant |S_{k-1}| + c \leqslant x + c,$$

то $\mathsf{E}(S_k^2 \mid \tau = k) \leqslant (x+c)^2$. Так как случайные величины $S_k I(\tau = k)$ и $S_n - S_k$ независимы, то $\mathsf{E}(S_k(S_n - S_k) \mid \tau = k) = 0$ и

$$\mathsf{E}((S_n - S_k)^2 \mid \tau = k) = \mathsf{E}(S_n - S_k)^2 = \mathsf{D}(S_n - S_k) = \sum_{j=k+1}^{n} \mathsf{D} X_j \leqslant B_n^2,$$

и, следовательно, для всех $k \leqslant n$

$$\mathsf{E}(S_n^2 \mid \tau = k) \leqslant (x+c)^2 + B_n^2.$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Доказательство

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(S_n^2; A) &= \mathsf{E}(S_n^2; \tau \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(S_n^2; \tau = k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = k)\mathsf{E}(S_n^2 \mid \tau = k) \leqslant \\
&\leqslant ((x+c)^2 + B_n^2)\mathsf{P}(A).
\end{aligned}$$

### Доказательство

Отсюда получаем:

$$((x+c)^2 + B_n^2)\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{E}(S_n^2; A) \geqslant B_n^2 - x^2 + x^2\mathsf{P}(A)$$

и

$$\mathsf{P}(A) \geqslant \frac{B_n^2 - x^2}{(x+c)^2 + B_n^2 - x^2} = 1 - \frac{(x+c)^2}{B_n^2 + (x+c)^2 - x^2} \geqslant 1 - \frac{(x+c)^2}{B_n^2}.$$

$\square$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

**Замечание**

В неравенствах Колмогорова, приведённых выше, мы получили оценки для распределений максимума частичных сумм независимых случайных величин через дисперсии указанных сумм. При изучении предельного поведения частичных сумм, в законах больших чисел в частности, оказываются полезными обратные неравенства — оценки дисперсии сумм независимых случайных величин через распределения их максимумов.

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Замечание

Одно из таких неравенств можно получить из неравенства (2.31). Если в доказательстве теоремы 2.11 опустить последнее неравенство, то мы приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|<x)\sum_{j=1}^{n}\mathsf{D}X_j &\leqslant x^2\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|<x)+ \\ &+ (x+c)^2\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant x). \end{aligned}$$

# Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин

## Следствие 2.14

*Пусть* $\mathsf{E}X_j = 0$ *и пусть* $\mathsf{P}(|X_j| \leqslant c) = 1$ *для некоторого* $c > 0$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}X_j \leqslant x^2 + (x+c)^2 \, \frac{\mathsf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant x)}{1 - \mathsf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant x)}. \tag{2.32}$$

*В частности, если* $\mathsf{P}(\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant x) \leqslant \delta$ *для некоторого* $0 < \delta < 1$, *то*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}X_j \leqslant x^2 + (x+c)^2 \, \frac{\delta}{1-\delta}.$$